ОТНОШЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Методические указания к лабораторной работе

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Целью работы является применение на практике математических понятий отношения и функции.

2. КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СПРАВКА

2.1. Определение отношения

Декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (обозначается $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$) есть множество всех кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ размерности n таких, что $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

Декартово произведение n одинаковых сомножителей $A \times A \times \ldots \times A$ обозначается символом A^n и называется n -ой степенью множества A. При этом $A^1 = A$. Примером декартова произведения является $R \times R = R^2$ – множество точек на плоскости. Здесь элементы $x \in R$ и $y \in R$ служат координатами некоторой точки на плоскости. Другим примером является множество R^3 точек в трехмерном евклидовом пространстве. Обобщением этих понятий является n-мерное пространство.

Определение. Любое подмножество $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ декартова произведения n множеств называется n - арным отношением. При n =1, 2, 3 имеем унарное, бинарное, тернарное отношения соответственно. Унарное отношение на множестве A представляет собой подмножество множества A.

2.2. Бинарные отношения (соответствия)

Бинарным отношением, или соответствием между элементами множеств A и B называется любое подмножество $R \subseteq A \times B$ декартова произведения этих множеств. Тот факт, что некоторые $a \in A$ и $b \in B$ находятся в отношении R, иногда выражают как aRb.

В качестве примера бинарного отношения рассмотрим отношение R между элементами множеств A=$\{1, 2, 3\}$ и B=$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, которое можно выразить словами так: элемент $x \in A$ есть делитель элемента $y \in B$. Тогда имеем:

$R=\{(1,1), (1,2),(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6)\}$.

Бинарное отношение удобно представлять в виде двоичной (булевой) матрицы. Если *i*-й элемент множества *A* соответствует *j*-му элементу множества *B*, то элемент матрицы, расположенный на пересечении *i*-ой строки и *j*-го столбца, имеет значение 1, в противном случае он имеет значение 0. Например, рассмотренное выше отношение R будет представлено следующей матрицей:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1	1	1	1	1	1	**1**
0	1	0	1	0	1	**2**
0	0	1	0	0	1	**3**

2.3. Проекции и сечения

Проекция элемента (a, b) множества $A\times B$ на множество A есть элемент a. Аналогично, элемент b является проекцией элемента (a, b) множества $A\times B$ на множество B. Проекцией множества $E \subset A\times B$ на A называется множество всех тех элементов из A, которые являются проекциями элементов из E на множество A. Для множеств А и В, рассмотренных выше, проекцией элемента (2,4) на множество А является элемент 2, а проекцией множества {(1,2),(2,2),(2,4)} – множество {1, 2}.

Сечением множества $E \subset A \times B$ по a, обозначаемое $E(a)$, называется множество всех тех элементов $y\in B$, для которых $(a, y)\in E$. Сечением $E(X)$ множества E по $X \subset A$ является объединение сечений для всех элементов из X.

Пусть R={(1,1),(1,3) (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (3,3), (3,6)}. Тогда E(2)={2,4}, а если X={2,3}, то E(X)={2,3,4,6}.

Бинарное отношение можно задавать с помощью сечений. Например, отношение, представленное матрицей

$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_4}$	
1	0	1	0	$\mathbf{a_1}$
1	0	1	1	$\mathbf{a_2}$
1	0	0	1	$\mathbf{a_3}$,
0	0	0	0	$\mathbf{a_4}$
0	0	0	1	$\mathbf{a_5}$

можно задать следующим образом: $R(a_1)=\{b_1,b_3\}$, $R(a_2)=\{b_1,b_3,b_4\}$, $R(a_3)=\{b_1,b_4\}$, $R(a_4)=\varnothing$, $R(a_5)=\{b_4\}$. Множество сечений для всех $a\in A$ является ***фактор-множеством***.

2.4. Области определения и образы

Областью определения отношения $R \subseteq A\times B$ является проекция множества R на A. Для рассматриваемого выше отношения такой областью является $\{a_1, a_2, a_3, a_5\}$.

Областью значений отношения $R \subseteq A\times B$ является сечение множества R по А. Областью значений рассматриваемого отношения R является $\{b_1,b_3,b_4\}$.

Образом множества $X \subseteq A$ относительно R называется множество $\{b/b \in B, x \in X, (x, b) \in R\}$. Прообразом множества $Y \subseteq B$ относительно R называется множество $\{a/a \in A, y \in Y, (y, a) \in R\}$. В нашем последнем примере образом множества $\{a_1,a_3\}$ относительно R является $\{b_1,b_3,b_4\}$, а прообразом множества $\{b_3,b_4\}$ – $\{a_1,a_2,a_3,a_5\}$.

Обратным отношением R^{-1} для некоторого отношения $R \subseteq A \times B$ является множество, образованное теми парами $(b, a) \in B \times A$, для которых $(a, b) \in R$. Матрица, представляющая отношение R^{-1}, получается транспонированием (заменой строк одноименными столбцами) матрицы, представляющей отношение R.

2.5. Функциональные отношения и функции

Отношение $R \subseteq A \times B$ называется ***функциональным***, если для каждого $a \in A$ сечение множества R по a содержит не более одного элемента. В функциональном отношении не существует пар с одинаковым левым элементом и различными правыми элементами, т.е. если $(a, b) \in R$ и R – функциональное отношение, то в R не может быть пары вида (a, c), где $b \neq c$.

Если отношение R^{-1}, обратное для функционального отношения R, также является функциональным, то отношение R называется ***взаимно однозначным***.

Матрица, представляющая функциональное отношение, в каждой строке имеет не более одной единицы. Примером может служить следующая матрица:

b	d	e	
1	0	0	a
0	1	0	b
1	0	0	c
0	1	0	d
0	1	0	e

Если сечение функционального отношения R по любому элементу а из множества A содержит один и только один элемент, то отношение R называется ***всюду определенным***.

Для всякого функционального отношения $R \subseteq A \times B$ можно определить функцию, связанную с этим отношением. Для обозначения функции используется запись $f: A \to B$. Если $(x, y) \in R$, то это можно выразить как $y = f(x)$, где x является аргументом, а y – значением функции f.

Таким образом, функцией $y = f(x)$ называется отношение, обладающее следующим свойством:

$$\forall x \in X : \exists y_1 = f(x) \,\&\, \exists y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2$$

Множество $\{x/(x, y) \in R\}$ называется областью определения функции f. Если это множество совпадает с A, то функция f является всюду определенной.

Такая функция называется отображением множества A в B. В противном случае функцию называют ***частичной***.

Множество $\{y/(x,y)\in R\}$ называется ***областью значений*** функции f. Если область значений функции f совпадает с множеством B, то f называют ***отображением A на B***, ***сюръективным отображением*** или *сюръекцией*. Обязательным условием существования отображения A на B является $|A|\geq|B|$.

Для сюръективной функции имеем:

$$\forall y \exists x : y = f(x)$$

Если функциональное отношение $R \subseteq A\times B$, определяющее функцию f, является взаимно однозначным, то функцию f называют ***инъективным отображением*** или ***инъекцией***. В этом случае существует функция f^{-1}, которая является обратной к функции f. При этом если $y = f(x)$, то $x = f^{-1}(y)$, а мощность области определения функции f не должна превышать $|B|$.

Для инъективной функции имеем:

$$\exists y : y = f(x_1) \,\&\, y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Функция f называется ***биективным отображением***, или ***биекцией***, если она является как сюръективным, так и инъективным отображением. Такое отображение называется еще ***1-1 соответствием***. На рис.1, взятом из книги [1], даны схемы рассмотренных видов отображений.

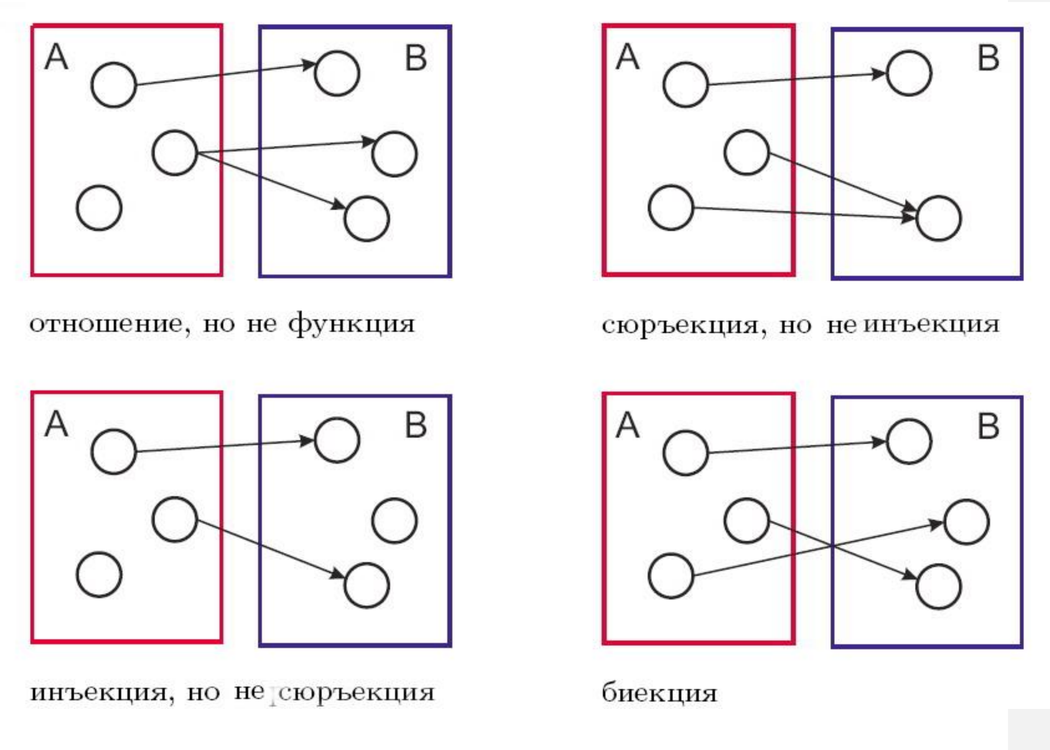

Рис. 1. Иллюстрации видов отображений

2.6. Подстановки, функционалы, операторы

Если R – взаимно однозначное отношение между элементами одного и того же множества, т.е. $R \subseteq A \times B = A^2$, и, кроме того, R и R^{-1} всюду определены, то отображение, связанное с R, называется ***подстановкой***.

Функция, определенная на множестве целых чисел, называется ***последовательностью***, а каждое ее значение – ***членом последовательности***.

Отображение f произвольного множества в множество действительных чисел называется ***функционалом***. Примером функционала может служить определенный интеграл.

Отображение f: $A \to B$, где A и B – некоторые множества функций, называется ***оператором***. Оператор преобразует одну функцию в другую.

2.7. Свойства и виды бинарных отношений

Пусть $R \subseteq A \times B$. Определим некоторые свойства, которыми может обладать или не обладать такое отношение:

рефлексивность	если $a = b$, то aRb;
иррефлексивность	если aRb, то $a \neq b$;
симметричность	если aRb, то bRa;
антисимметричность	если aRb и bRa, то a=b;
транзитивность	если aRb и bRc, то aRc;
дихотомия	если $a \neq b$, то либо aRb, либо bRa.

Рассмотрим некоторые типы бинарных отношений, характеризуемые определенным тем или иным набором свойств.

Отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Примерами отношения эквивалентности являются равносильность формул, подобие геометрических фигур, принадлежность студентов к одной группе, принадлежность населенных пунктов к одному району и т.п.

Отношение эквивалентности делит множество на непересекающиеся подмножества – ***классы эквивалентности***. С другой стороны, всякое разбиение множества M на непересекающиеся подмножества задает отношение эквивалентности на множестве M: любые два элемента, принадлежащие одному и тому классу разбиения, эквивалентны, а элементы, принадлежащие различным классам, не являются эквивалентными. Множество элементами которого являются все классы эквивалентности образует ***фактор-множество*** множества М по R (обозначается М / R).

Отношение совместимости рефлексивно и симметрично. Примерами отношения совместимости являются близость чисел, знакомство людей и т.п.

Отношение нестрогого порядка рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Отношения $\leq$ (меньше или равно) и $\geq$ (больше или равно) для действительных чисел так же, как $\subseteq$ и $\supseteq$ для множеств являются отношениями нестрогого порядка.

Отношение строгого порядка иррефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Отношениями строгого порядка являются $<$ (меньше) и $>$ (больше) для действительных чисел, а также $\subset$ и $\supset$ для множеств.

Множество М, на котором задано отношение порядка R (строгого или нестрогого), может быть ***полностью упорядоченным***, если любые два элемента a и b из М находятся в отношении R, т.е. aRb или bRa. При этом говорят, что a и b ***сравнимы***. Если М содержит хотя бы одну пару элементов c и d, для которых не имеет место ни cRd, ни dRc, то множество М является ***частично упорядоченным***, а указанные элементы c и d несравнимы.

Отношение полного порядка обладает свойствами иррефлексивности, антисимметричности и дихотомии. Полный порядок называют еще ***линейным или совершенным***.

Примеры. 1). Для множества действительных чисел R отношения $\leq$ и $<$ являются отношениями полного порядка. Для семейства подмножеств некоторого множества М отношение $\subseteq$ является отношением частичного порядка. Например, $\{a_1,a_3\}\subseteq\{a_1,a_2,a_3\}$, а подмножества $\{a_1,a_3\}$ и $\{a_1,a_2,a_4\}$ несравнимы.

2). Порядок букв в алфавите и естественный порядок цифр являются полными порядками. На основе порядка букв строится лексикографический порядок слов, используемый в словарях и определяемый следующим образом.

Обозначим это отношение символом $\prec$. Пусть имеются слова $w_1=a_{11}a_{12}\dots a_{1m}$ и $w_2=a_{21}a_{22}\dots a_{2n}$. Тогда $w_1\prec w_2$, если и только если либо $w_1=pa_iq$, $w_2=pa_jr$ и $a_i\prec a_j$, где p, q и r – некоторые слова, возможно, пустые, а a_i и a_j – буквы, либо $w_2=w_1p$, где p – непустое слово.

Например, учебник$\prec$ученик и мор$\prec$море. В первом случае p=уче, a_i=б, a_j=н, q=r=ник, и в алфавите буква «н» стоит дальше буквы «б». Потому в словаре слово «ученик» следует искать после слова «учебник». Во втором случае w_1=мор и p=е. Согласно лексикографическому порядку слово «море» должно быть помещено в словаре после слова «мор».

2.8. Способы представления отношений и функций

Известны табличный и графический способы представления отношений и функций. В последнем случае различают *график функции* и *граф отношения*.

Представление отношений графами является визуализацией их матричного представления, если задавать графы матрицами инцидентности.

Ориентированный двудольный граф - это пара вида (V, A), где V – множество вершин, A – множество дуг и

$$V = V_1 \cup V_2 \text{ и } V_1 \cap V_2 = \emptyset \text{ и } A \subseteq V_1 \times V_2,$$

т.е. любая дуга из A соединяет вершину из V_1 с вершиной из V_2. Множества V_1 и V_2 называются ***долями графа***.

Ориентированные двудольные графы на долях V_1, V2 представляют бинарные отношения из V_1 в V2.

Неориентированный двудольный граф - это пара вида (V, E), где V - множество вершин, V = V_1 ∪ V2 V_1 ∩ V2 = ∅, a E = {{v1, v2} | v1 ∈ V_1, v2 ∈ V2} - множество неориентированных ребер, соединяющих вершины из V1 с вершинами из V2.

Неориентированные двудольные графы на долях V_1, V2 представляют симметричные бинарные отношения из V_1 в V2. (Неориентированный) полный граф - (неориентированный) граф G = (V,E), в котором каждая пара вершин связана ребром.

Полный граф с множеством вершин U представляет ***универсальное отношение*** на множестве U : = {(a, b) | a ∈ A, b ∈ A)}.

3. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАБОТЫ.

Работа выполняется в системе *Mathematica* [3]. Для выполнения вычислительных экспериментов с отношениями и функциями применяются программы генерации отношений и представления отношений графами.

3.1. Генерация отношений

Пусть дано некоторое множество *M*. Необходимо построить множество всех отношений на данном множестве.

Для решения данной задачи примем ряд допущений.

1. Поскольку природа элементов множества *M* произвольна, будем считать их натуральными числами. Это позволит нам легко генерировать множества, используя в системе *Mathematica* функцию Range[ ].
2. Применим матричную форму представления отношений, используя квадратные матрицы. В этом случае число сомножителей доменов совпадает с числом кортежей отношения. Очевидно, необходимо подобрать объект, характеризующий каждое такое отношение в матричной форме.

С учетом допущений будем решать задачу генерации отношений при помощи следующей функции:

$$\mathfrak{R}_{n\_} := \mathfrak{R}_n = \mathrm{Map}[\mathrm{Partition}[\mathrm{IntegerDigits}[\#, 2, n^2], n]\&, \mathrm{Range}[0, 2^{n^2}-1]] \qquad (1)$$

Матрицы отношений строятся следующим образом:

$$\mathrm{MatrixForm} \,/@\, \mathfrak{R}_n$$

Функция (1) и другие функции, позволяющие выполнять анализ построенных отношений, реализованы в пакете relations.m в системе *Mathematica*.

3.2. Представление отношений графами.

Программа исследования отношений RelationsAndGraphs.nb [4] позволяет строить отношения на заданном множестве и отображать их в виде матрицы отношения и графа.

4. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ.

4.1. Используя литературные источники, приведенные в списке литературы, изучить понятия отношения и функции.

4.2. Исследовать виды и свойства отношений, генерируемых на множествах из одного, двух и трех элементов с помощью программы RelationsAndGraphs.nb.

4.3. Изучить пакет relations.m: изучить состав и назначение функций пакета; научиться пользоваться пакетом.

4.4. Выполнить индивидуальное задание согласно номеру в списке группы.

4.5. Подготовить ответы на контрольные вопросы.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Отчет по работе должен содержать:

- Результаты исследования свойств отношений при помощи программы RelationsAndGraphs.nb;
- Результаты выполнения индивидуального задания в виде программного кода в системе *Mathematica* и выходных данных программы;
- Объяснение результатов выполнения индивидуального задания.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Дайте определение понятию «Отношение»
2. Что такое универсальное отношение?
3. Что входит в состав отношений?
4. Что такое кортеж?
5. Что такое проекция отношения?
6. Дайте общее определение фактор-множества.
7. Классифицируйте отношения.
8. Связаны ли между собой отношения и функции?
9. Что такое функциональное отношение?
10. Что такое функция?
11. Какие существуют отношения?
12. Что такое полный граф?
13. Изменяет ли композиция отношений арность

7. Литература

1. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПБ, Питер, 2001. -304 с.
2. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. -М.: Лаборатория базовых знаний, 2003. – 376 с.
3. Богатырёв М.Ю. Прикладное моделирование в системе *Mathematica*. Основы работы с системой: Учеб. пособие по спец. 071900 «Информационные системы в технике и технологиях». – Тула, ТулГУ, 2003. – 176 с.
4. Электронный ресурс: http://demonstrations.wolfram.com/RelationsAndGraphs/

8. Индивидуальные задания

На заданных множествах – доменах:

1). построить матрицы заданных отношений, определить тип отношний;

2). проверить, является ли данное отношение функцией, и определить тип функции.

№	Домены		Отношения
	D 1	D 2	
1.	Номера учебных групп	Названия факультетов	Принадлежность группы факультету
2.	{"Иванова Анна Михайловна", "Петров Игорь Владимирович", "Сидорова Елена Юрьевна", "Хохлов Петр Петрович", "Мартиросян Ирина Олеговна", "Сазонова Ольга Петровна"}	{"М", "Ж"}	пол
3.	Натуральные числа 1 … 40	Натуральные числа 1 … 40	Наличие НОД
4.	{090964,060965,090966,090969,090970,090975, 090981,090983},	{"+","−"}	Четность номеров
5.	{"корабль","table","лук","pen","cucumber","tomato","7 сыров","grass","морковь", “7-up”};	{рус, англ}	принадлежность
6.	На дискретном множестве чисел построить множество всех его подмножеств и задать отношение включения		
7.	Множество букв латинского алфавита	Множество букв латинского алфавита	Быть словом длины 4
8.	Множество квадратных матриц порядка 3	Множество квадратных матриц порядка 3	Отношение эквивалентности матриц

Примечание [W1]:

9.	Множество списков элементов	Множество списков элементов	Отношение «быть больше» по количеству элементов в списке.
10.	Множество подмножеств	Множество подмножеств	Отношение «быть подмножеством»
11.	Множество слов длины 6	Множество слов длины 4	Отношение «иметь общие буквы»
12.	Множество слов длины n	Множество слов длины m	Отношение «иметь общий корень»
13.	Множество квадратных матриц	Множество квадратных матриц	Отношение «быть подматрицей»